أمثلة:

مثال [1]: التطبيق الثابت مستمر

$$f: X \longrightarrow Y$$
$$f(x) = y$$

البرهان:

لنأخذ مجموعة G مفتوحة كيفية في Y هنالك احتمالان:

1) $y \in G$ عندها $f^{-1}(G) = X$

2) $y \notin G$ عندها $f^{-1}(G) = \varphi$

نجد أن الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة في Y ، إذاً التطبيق ثابت مستمر.

مثال [2]: التطبيق المطابق المستمر:

$$I: X \longrightarrow X$$
$$I(x) = x$$

البرهان:

G مفتوحة في المستقر X صورتها العكسية $f^{-1}(G)$ في المنطلق X $f^{-1}(G) = G$

وفي الحالتين تكون مجموعة مفتوحة في X.

مثال [3]:

مقصور التطبيق المطابق مستمر

$$I_A : A \longrightarrow X$$

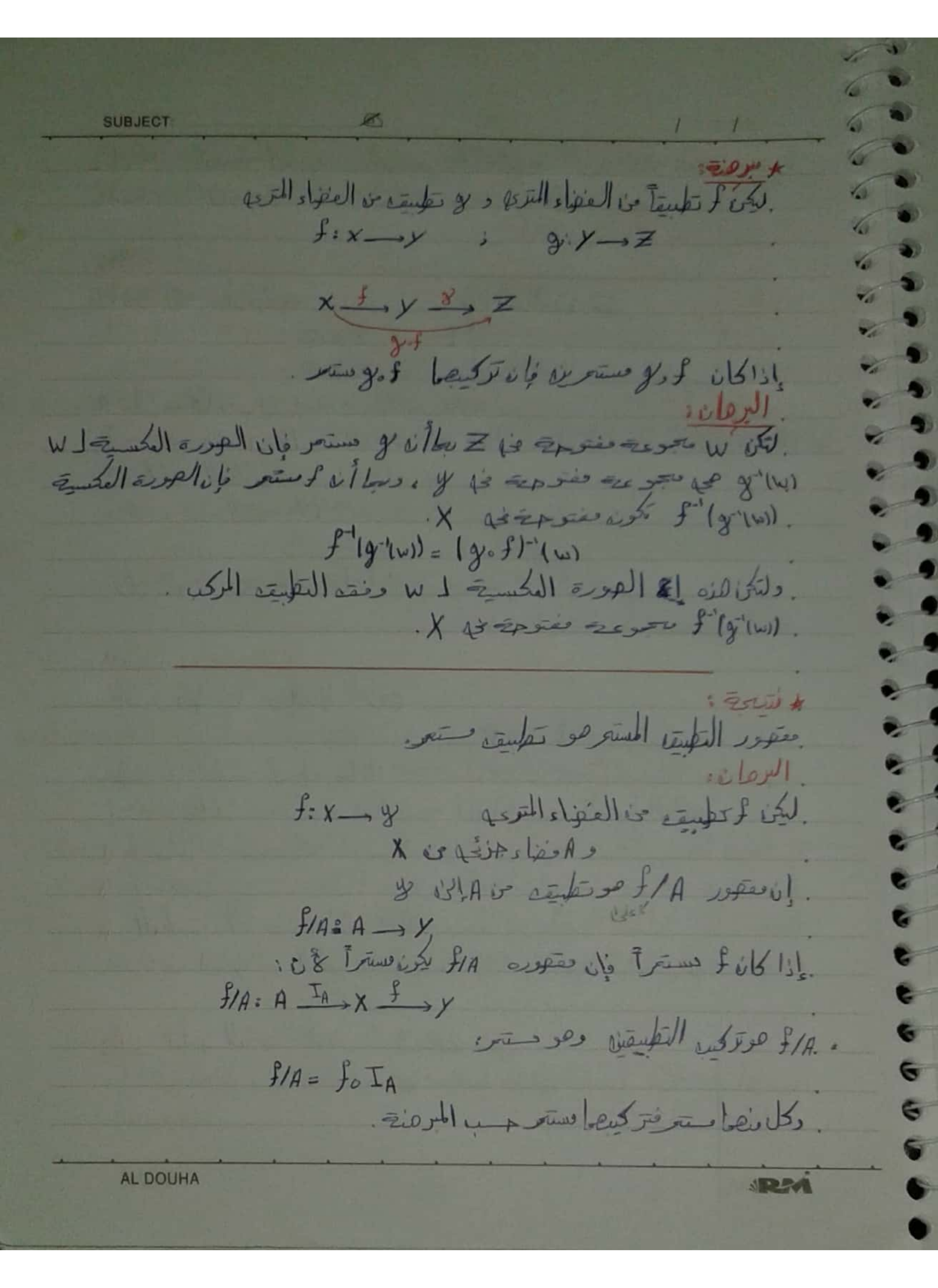
حيث A فضاء جزئي من X

$$I_A(x) = x \; ; \; \forall x \in A.$$

البرهان: نأخذ مجموعة مفتوحة G في المستقر صورتها العكسية $f^{-1}(G) = A \cap G$

وهي في الفضاء الجزئي A مجموعة مفتوحة إذاً التطبيق مستمر.

سنبين فيما يلي أن تركيب تطبيقين مستمرين هو تطبيق مستمر.





★ مبرهنة:

ليكن f تطبيقاً من الفضاء المتري و g تطبيق من الفضاء المتري

$f: X \to Y \quad ; \quad g: Y \to Z$

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ، $g\circ f$

إذا كان f و g مستمرين فإن تركيبهما $g\circ f$ مستمر.

البرهان:

لتكن W مجموعة مفتوحة في Z بما أن g مستمر فإن الصورة العكسية لـ W

$g^{-1}(W)$ هي مجموعة مفتوحة في Y ، وبما أن f مستمر فإن الصورة العكسية

$f^{-1}(g^{-1}(W))$ تكون مفتوحة في X.

$$f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g\circ f)^{-1}(W)$$

ولكن هذه هي الصورة العكسية لـ W وفق التطبيق المركب.

$f^{-1}(g^{-1}(W))$ مجموعة مفتوحة في X.

---

★ نتيجة:

مقصور التطبيق المستمر هو تطبيق مستمر.

البرهان:

ليكن f تطبيق من الفضاء المتري $f: X \to Y$

و A فضاء جزئي من X

إن مقصور $f/A$ هو تطبيق من A إلى Y

$f/A: A \to Y$

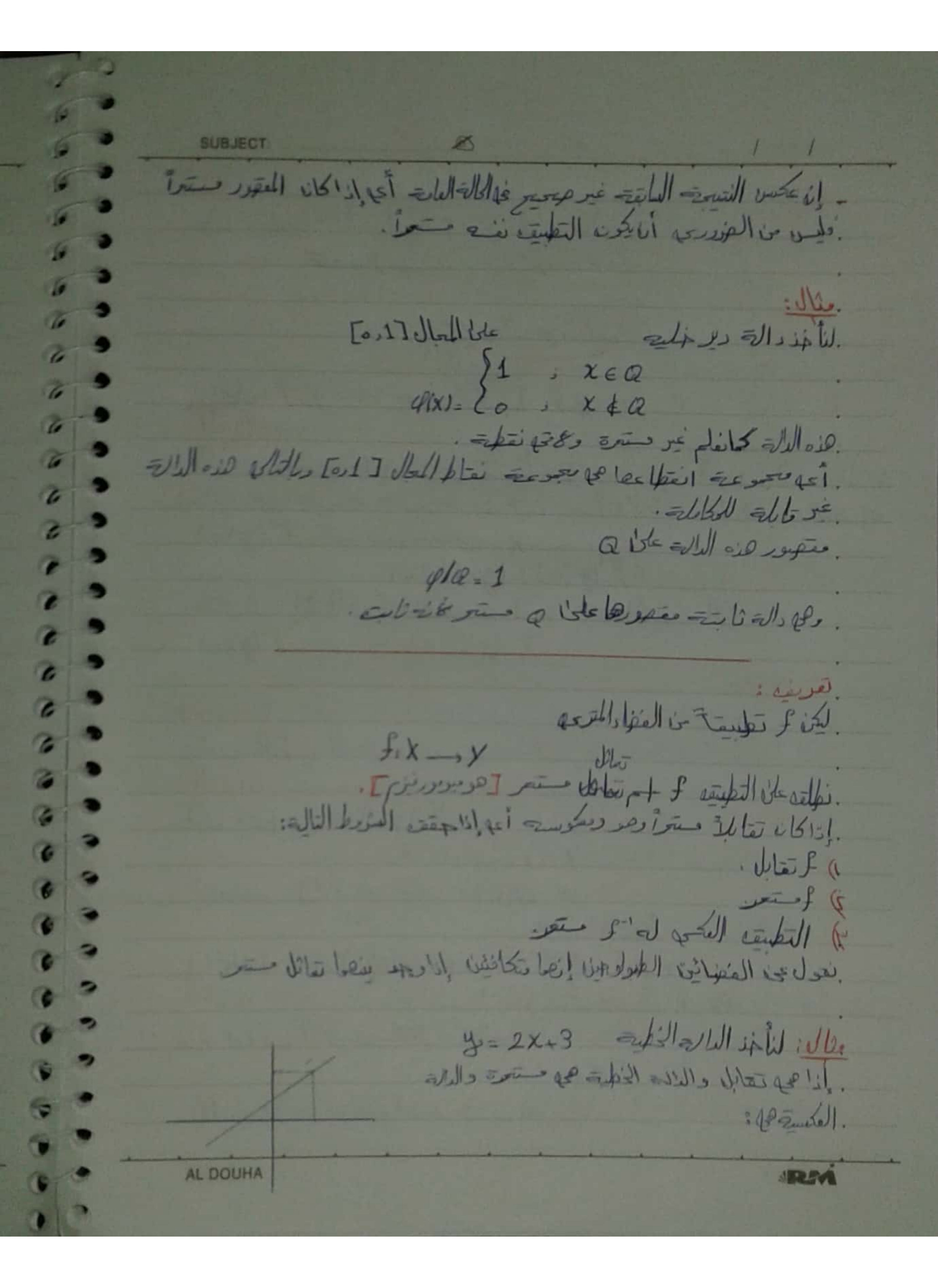
إذا كان f مستمراً فإن مقصوره $f/A$ يكون مستمراً لأن:

$f/A: A \xrightarrow{I_A} X \xrightarrow{f} Y$

$f/A$ هو تركيب التطبيقين وهو مستمر:

$f/A = f\circ I_A$

وكل منهما مستمر فتركيبهما مستمر حسب المبرهنة.





- إن عكس النتيجة السابقة غير صحيح في الحالة العامة أي إذا كان المقصور مستمراً فليس من الضروري أن يكون التطبيق نفسه مستمراً.

**مثال:**

لنأخذ دالة ديريخليه على المجال [0،1]

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & ; x\in Q\\ 0 & ; x\notin Q\end{cases}$$

هذه الدالة كما نعلم غير مستمرة وعند أي نقطة.
أي مجموعة انقطاعها هي مجموعة نقاط المجال [0،1] وبالتالي هذه الدالة غير قابلة للمكاملة.
مقصور هذه الدالة على Q

$$\varphi / Q = 1$$

وهي دالة ثابتة مقصورها على Q مستمر لأنه ثابت.

---

**تعريف:**

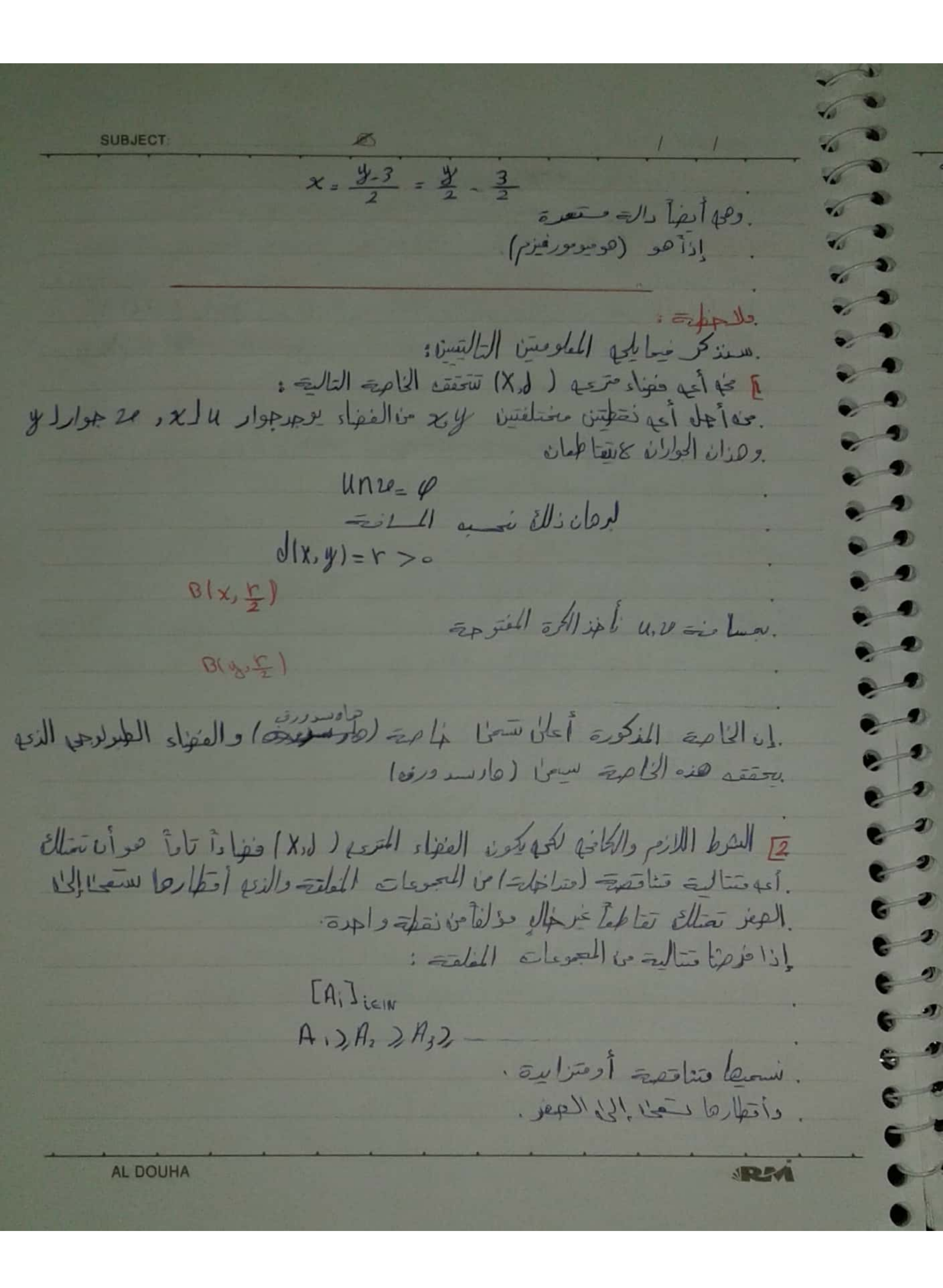
ليكن f تطبيقاً من الفضاءات المترية

$$f: X \to Y$$

نطلق على التطبيق f اسم تقابل (تماثل) مستمر [هوميومورفيزم].
إذا كان تقابلاً مستمراً وهو معكوسه أي إذا حقق الشروط التالية:
1) f تقابل.
2) f مستمر
3) التطبيق العكسي له $f^{-1}$ مستمر

نقول عن الفضائين الطوبولوجيين إنهما متكافئين إذا وجد بينهما تقابل مستمر

**مثال:** لنأخذ الدالة الخطية $y = 2x+3$
إذا هي تقابل والدالة الخطية هي مستمرة والدالة العكسية هي:





$x = \frac{y-3}{2} = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$

وهو أيضاً دالة مستمرة

إذاً هو (هوميومورفيزم)

ملاحظة:

سنذكر فيما يلي المعلومتين التاليتين:

1 نحن أي فضاء متري $(X,d)$ تتحقق الخاصية التالية:

من أجل أي نقطتين مختلفتين $x$, $y$ من الفضاء يوجد جوار $u$ لـ $x$، $v$ جوار لـ $y$

وهذان الجواران لا يتقاطعان

$u \cap v = \varphi$

لبرهان ذلك نحسب المسافة

$d(x,y) = r > 0$

$B(x, \frac{r}{2})$

بمسافة $u, v$ نأخذ الكرة المفتوحة

$B(y, \frac{r}{2})$

إن الخاصة المذكورة أعلاه تسمى خاصة (هاوسدورف) والفضاء الطوبولوجي الذي يحقق هذه الخاصة يسمى (هاوسدورف)

2 الشرط اللازم والكافي لكي يكون الفضاء المتري $(X,d)$ فضاءً تاماً هو أن تمتلك أي متتالية متناقصة (متداخلة) من المجموعات المغلقة والتي أقطارها تسعى إلى الصفر تمتلك تقاطعاً غير خالٍ مؤلفاً من نقطة واحدة.

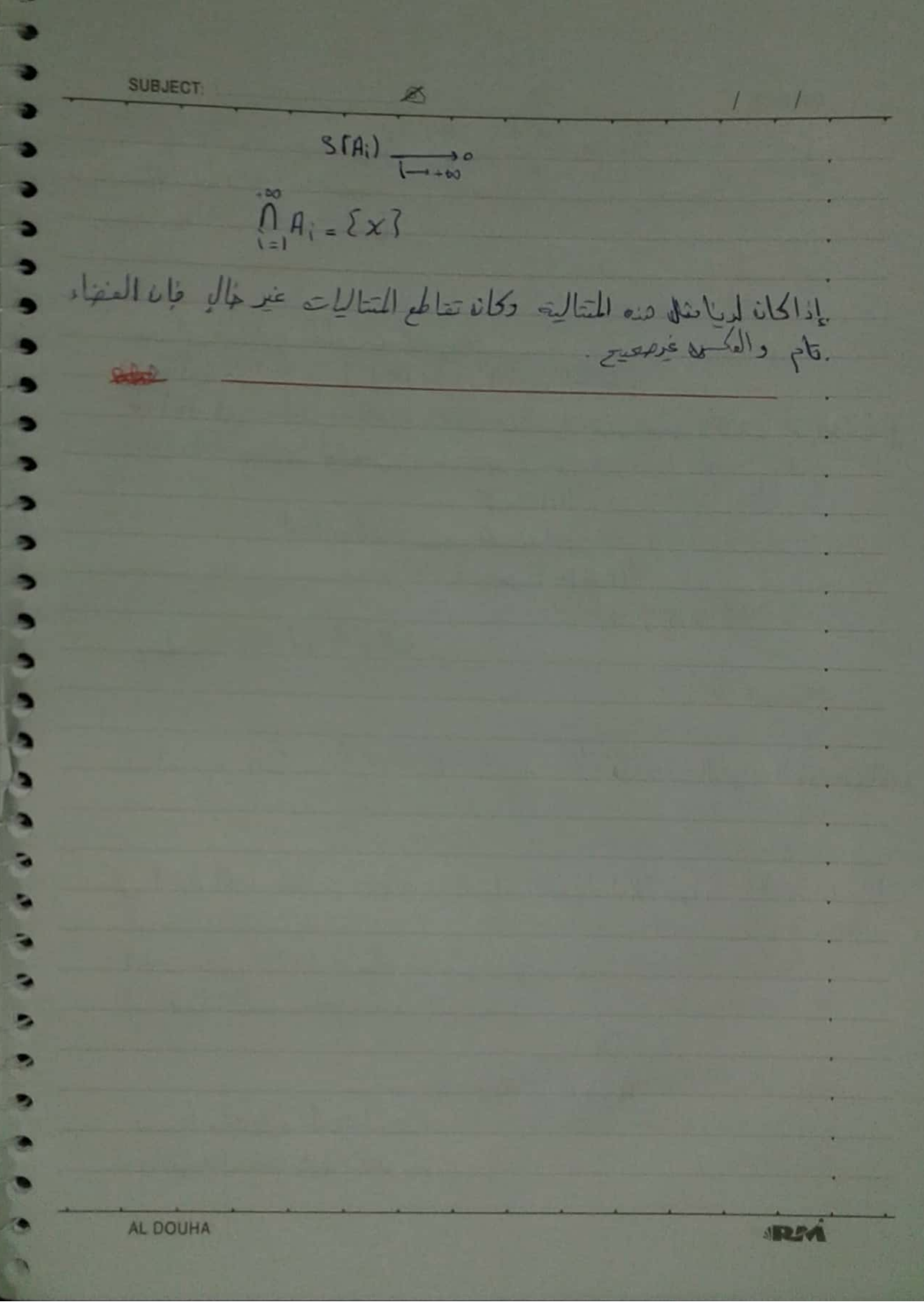
إذا فرضنا متتالية من المجموعات المغلقة:

$[A_i]_{i \in IN}$

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$

نسميها متناقصة أو متزايدة.

وأقطارها تسعى إلى الصفر.



SUBJECT: ∅ / /

$$\delta(A_i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$$

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \{x\}$$

إذا كان لدينا مثل هذه المتتالية وكان تقاطع المتتاليات غير خالٍ فإن الفضاء تام والعكس غير صحيح.

AL DOUHA